

$2^{100}$  을 7 로 나누었을 때의 나머지

$$2^{100} = 7Q + R$$

$$\left(2^3\right)^{33} \times 2 = \left(2^3 - 1\right)Q + R$$

$$2^3 = a \text{ 라 하면}$$

$$a^{33} \times 2 = (a - 1)Q + R$$

위 등식은 항등식이므로 항등식의 성질을 이용하여 a 에 1 을 대입하면

$$1^{33} \times 2 = (1 - 1)Q + R$$

따라서  $R=2$

$37^{49}$ 을 7로 나누었을 때의 나머지

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \cdots + nab^{n-1} + b^n$$

$$(a-b)^n = a^n + na^{n-1}(-b) + \cdots + na(-b)^{n-1} + (-b)^n$$

위의 식을 보면

$(b)^n$ 을 제외하고는 모두  $a$ 가 들어 있으므로  $(a+b)^n$ 을  $a$ 로 나눈 나머지는  $(b)^n$ 을  $a$ 로 나눈 나머지와 같다.

밑의 식을 보면.

$(-b)^n$ 을 제외하고는 모두  $a$ 가 들어 있으므로  $(a-b)^n$ 을  $a$ 로 나눈 나머지는  $(-b)^n$ 을  $a$ 로 나눈 나머지와 같다.

$37^{49}$ 을 7로 나누었을 때의 나머지=

$(7+30)^{49}$ 을 7로 나누었을 때의 나머지= $30^{49}$ 을 7로 나누었을 때의 나머지

$30^{49} = (7+23)^{49}$ 을 7로 나누었을 때의 나머지= $23^{49}$ 을 7로 나누었을 때의 나머지

$23^{49} = (7+16)^{49}$ 을 7로 나누었을 때의 나머지= $16^{49}$ 을 7로 나누었을 때의 나머지

$16^{49} = (7+9)^{49}$ 을 7로 나누었을 때의 나머지= $9^{49}$ 을 7로 나누었을 때의 나머지

$9^{49} = (7+2)^{49}$ 을 7로 나누었을 때의 나머지= $2^{49}$ 을 7로 나누었을 때의 나머지

이제  $2^{49}$ 을 7로 나누었을 때의 나머지를 구하면 된다.

$$2^{49} = 7Q + R$$

$$(2^3)^{16} \times 2 = (2^3 - 1)Q + R$$

$$2^3 = a \text{ 라 하면}$$

$$a^{16} \times 2 = (a - 1)Q + R$$

위 등식은 항등식이므로 항등식의 성질을 이용하여  $a$ 에 1을 대입하면

$$1^{16} \times 2 = (1 - 1)Q + R$$

따라서  $R=2$ , 페르마의 소정리를 이용하면 훨씬 간단하지만...

